

微分積分学 B 追試験 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい.

- | | |
|---|---|
| (1) 閉区間 $[1, 4]$ 上連続な関数に対する定積分の線形性を述べなさい. | (4) 閉区間 $[1, 4]$ 上連続な関数に対する定積分の三角不等式を述べなさい. |
| (2) 閉区間 $[1, 4]$ 上連続な関数に対する定積分の区間加法性を述べなさい. | (5) 閉区間 $[1, 4]$ 上連続な関数に対する積分の平均値の定理を述べなさい. |
| (3) 閉区間 $[1, 4]$ 上連続な関数に対する定積分の順序保存性を述べなさい. | (6) 関数 $f : (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $F : (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べなさい. |

(7) 閉区間 $[1, 4]$ 上連続な関数 $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, S が f の不定積分であることの定義を述べなさい.

(10) $e^{5x} \cos(3x)$ の原始関数を一つ求めなさい.

(8) $[1, 2)$ 上連続な関数 $f : [1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\int_1^2 f(x) dx$ が収束することの定義を述べなさい.

(11) $\int_{-4}^2 \sqrt{16 - x^2} dx$ を求めなさい.

(9) $[1, 2)$ 上連続な関数 $f : [1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\int_1^2 f(x) dx$ が絶対収束することの定義を述べなさい.

(12) $\lambda > 0$ に対して, $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$ を求めなさい.

(13) $\int_0^1 \log x \, dx$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) 自然数 m に対して $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \cos(mx) \, dx$ を求めなさい.

(15) $\alpha > 0$ に対して, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ が収束するための α に対する必要十分条件を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[-2, 1]$ 上連続とする. このとき, f の $[-2, 1]$ 上の定積分 $\int_{-2}^1 f(x) dx$ の定義を述べなさい. ただし, 「分割」, 「分割の長さ」, 「Riemann 和」の定義を含めること.

問題 3.

次の各問いに答えなさい。

(1) \mathbb{R} 上微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $a < b$ をみたす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx$$

を証明しなさい。

(2) \mathbb{R} 上連続で有界な関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$G(x) := \int_0^x g(\xi) d\xi$$

と定めるとき、 G が \mathbb{R} 上連続となることを示しなさい。

問題 4.

$\alpha > 0$ に対して, $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^{3\alpha}} dx$ を考える.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^{3\alpha}} dx$ の定義を述べなさい.

(2) 定義にもとづいて, $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^{3\alpha}} dx$ が収束する $\alpha > 0$ の必要十分条件を求めて, 収束するときの積分の値を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。