

微分積分学 B 理解度確認試験

2025 年 1 月 22 日 第 2 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい.

- | | |
|---|---|
| (1) 閉区間 $[0, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の線形性を述べなさい. | (4) 閉区間 $[0, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の三角不等式を述べなさい. |
| (2) 閉区間 $[0, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の区間加法性を述べなさい. | (5) 閉区間 $[0, 2]$ 上連続な関数に対する積分の平均値の定理を述べなさい. |
| (3) 閉区間 $[0, 2]$ 上連続な関数に対する定積分の順序保存性を述べなさい. | (6) 関数 $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $F : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べなさい. |

(7) 閉区間 $[0, 2]$ 上連続な関数 $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, S が f の不定積分であることの定義を述べなさい.

(10) $e^{-3x} \sin(5x)$ の原始関数を一つ求めなさい.

(8) $[2, \infty)$ 上連続な関数 $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\int_2^{\infty} f(x) dx$ が収束することの定義を述べなさい.

(11) $\int_{-2}^1 \sqrt{4-x^2} dx$ を求めなさい.

(9) $[2, \infty)$ 上連続な関数 $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\int_2^{\infty} f(x) dx$ が絶対収束することの定義を述べなさい.

(12) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$ を求めなさい.

(13) $\int_0^1 \arctan x \, dx$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) 自然数 m に対して $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \sin(mx) \, dx$ を求めなさい.

(15) $\alpha > 0$ に対して, $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^{2\alpha}} \, dx$ が収束するための α に対する必要十分条件を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[-1, 2]$ 上連続とする. このとき, f の $[-1, 2]$ 上の定積分 $\int_{-1}^2 f(x) dx$ の定義を述べなさい. ただし, 「分割」, 「分割の長さ」, 「Riemann 和」の定義を含めること.

問題 3.

次の各問いに答えなさい。

- (1) \mathbb{R} 上微分可能な関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = - \int_a^b f'(x)g(x) dx + [f(x)g(x)]_a^b$$

を証明しなさい。

- (2) \mathbb{R} 上微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $a < b$ をみたす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx$$

を証明しなさい。

問題 4.

$\alpha > 0$ に対して, $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^{4\alpha}} dx$ を考える.

(1) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^{4\alpha}} dx$ の定義を述べなさい.

(2) 定義にもとづいて, $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^{4\alpha}} dx$ が収束する $\alpha > 0$ の必要十分条件を求めて, 収束するときの積分の値を求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。