

微分積分学 B 中間試験

2025 年 11 月 6 日 第 2 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみを書くこと.

- (1) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で微分可能であることの定義を述べなさい.
- (2) $[a, b]$ 上連続, (a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, Rolle の定理を述べなさい.
- (3) $[a, b]$ 上連続, (a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, (微分の) 平均値の定理を述べなさい.
- (4) 开区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ と $c \in I$ に対し, f が $x = c$ で (狭義の) 極大であることの定義を述べなさい.
- (5) $f(x) = (x^2 + 2)^6$ ($x \in \mathbb{R}$) とおく. $f'(1)$ を求めなさい.
- (6) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $e^x x^{-n}$ の導関数を求めなさい.

(7) $x > 0$ に対して, $(\sin x)^{\cos x}$ の導関数を求めなさい.

(10) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2 \sin x - \cos x}{x^2}$ を求めなさい.

(8) $f(x) = (\arcsin x)^3$ とおく. $f'(\frac{1}{2})$ を求めなさい.

(11) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ を求めなさい.

(9) $\sqrt{4-x^2}$ の第二次導関数を求めなさい.

(12) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ を求めなさい.

(13) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x) + x}{1 - \cos(3x)}$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

(14) $\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + x^5B(x)$
と書いたときに, $B(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ となる
とき, a_4 を求めなさい.

(15) $e^{2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3B(x)$ と書いた
ときに, $B(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ となるとき, a_3 を
求めなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。

問題 2.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 - 6x + 2 \log(3x + 1)}{x(\cos(2x) - 1)}$ を **de l'Hospital の定理** を用いずに求めたい.

- (1) $\log(1 + 3x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3B(x)$ と書いたときに $B(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ となるとき, a_0, a_1, a_2, a_3 を求めなさい (答えのみでよい).
- (2) $\cos(2x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^3\tilde{B}(x)$ と書いたときに $\tilde{B}(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ となるとき, b_0, b_1, b_2, b_3 を求めなさい (答えのみでよい).
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 - 6x + 2 \log(3x + 1)}{x(\cos(2x) - 1)}$ を **de l'Hospital の定理** を用いずに求めなさい.

問題 3.

$a, b > 0$ に対して, $(a + b)^9 \leq 256(a^9 + b^9)$ を示したい. 次の問いに答えなさい.

- (1) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が凸関数であることの定義を述べなさい.
- (2) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) = x^9$ で定める. f が $(0, \infty)$ 上凸関数であることを示しなさい.
- (3) $(a + b)^9 \leq 256(a^9 + b^9)$ を示しなさい.

問題 4.

开区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 上微分可能な関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ は $c \in (a, b)$ で最大になるとする. このとき, $f'(c) = 0$ を示しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい。採点には一切利用しない。