微分積分学 B 定期試験

2024 年 1 月 30 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい.

(1) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数に対する定積分の線形性を述べなさい.

(2) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数に対する定積分の加法性を述べなさい.

(3) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数に対する定積分の順序保存性を述べなさい.

(4) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数に対する定積分の三角不等式を述べなさい.

(5) 閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数に対する積分の平均値の定理を述べなさい.

(6) 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ に対して, $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べなさい.

学生番号　　　　　　名前

(7) $[a,b]$ 上連続な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して，S が f の不定積分であることの定義を述べなさい.

(8) $[0,\infty)$ 上連続な関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が収束することの定義を述べなさい.

(9) $[0,\infty)$ 上連続な関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を述べなさい.

(10) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ の原始関数を一つ求めなさい.

(11) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を求めなさい.

(12) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$ を求めなさい.

(13) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \, dx$ を求めなさい.

(14) 自然数 m に対して $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\sin(mx)\, dx$ を求めなさい.

(15) $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3\alpha}}\, dx$ が収束するための α に対する必要十分条件を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ は $[-1,2]$ 上連続とする．このとき，f の $[-1,2]$ 上の定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ の定義を述べなさい．ただし，「分割」，「分割の長さ」，「Riemann 和」の定義を含めること．

学生番号　　　　　　名前

問題 3.

$[0, 1]$ 上連続な関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は $x \in [0, 1]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする．このとき，x 軸，y 軸，$x = 1$，グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $2\pi \int_0^1 x f(x)\, dx$ で表されることを，区分求積法を用いて説明しなさい．

問題 4.

$\alpha > 0$ に対して，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を考える．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ の定義を述べなさい．

(2) 定義にもとづいて，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束する $\alpha > 0$ の必要十分条件を求め，積分の値を求めなさい．

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．