

微分積分学A 中間試験

2026年6月11日 第2時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみでよい. 答えがどれかわかるように書くこと.

(1) Archimedes の公理を述べなさい.

(4) 集合 $S \subset \mathbb{R}$ が下に有界であることの定義を述べなさい.

(2) Cantor の公理を述べなさい.

(5) 空でない集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して Weierstrass の定理を述べなさい. なお, 必要に応じて, $S_U := \{M \in \mathbb{R} : \forall x \in S \text{ に対して } x \leq M\}$ を用いてよい.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する, すなわち $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$ であることの定義を述べなさい.

(6) α が集合 $S \subset \mathbb{R}$ の上限 $\alpha = \sup S$ であることの, ε 論法を用いた定義を述べなさい.

(7) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を述べなさい.

(10) Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

(8) 単調数列の収束性に関する定理を述べなさい.

(11) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

(9) 自然対数の底 e の定義を述べなさい.

(12) 実数の完備性に関する定理を述べなさい.

(13) 次の (a), (b), (c) が正しいか否か答えなさい.

- (a) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbb{R}$ に収束するとし、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < a_n$ をみたすとする. このとき, $0 \leq a$ が成り立つ.
- (b) 下に有界な有理数の部分集合 $S \subset \mathbb{Q}$ には有理数の下限 $\inf S \in \mathbb{Q}$ が存在する.
- (c) 下に有界で単調減少な数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

(a) (b) (c)

(14) 正の数 $a > 0$ に対して, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ を求めなさい.

(15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$\frac{4n+65}{2n+48} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$ となることを ε - N 論法で示したい.

- (1) $\frac{4n+65}{2n+48} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$ の ε - N 論法を用いた定義を述べなさい.
- (2) $\frac{4n+65}{2n+48} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$ を ε - N 論法を用いて示しなさい.

問題 3.

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とおく.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) = 3a - 2b$ となることの ε - N 論法による定義を述べなさい.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) = 3a - 2b$ なることを ε - N 論法を用いて示しなさい.

問題 4.

$A := (6, 11)$ とおく. $\sup A = 11$ を示したい.

(1) $\sup A = 11$ の定義を述べなさい.

(2) $\sup A = 11$ を証明しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．