微分積分学 A 中間試験

2024 年 6 月 20 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい．答えのみを書くこと.

(1) Archimedes の公理を述べなさい.

(2) Cantor の公理を述べなさい.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する，すなわち $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ であることの定義を述べなさい.

(4) 集合 $S \subset \mathbb{R}$ が上に有界であることの定義を述べなさい.

(5) 空でない集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して Weierstrass の定理を述べなさい．なお，必要に応じて，$S_U := \{M \in \mathbb{R} : M$ は S の上界 $\}$ を用いてよい.

(6) α が集合 $S \subset \mathbb{R}$ の上限 $\alpha = \sup S$ であることの，ε 論法を用いた定義を述べなさい.

学生番号　　　　　　名前

(7) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であることの定義を述べなさい.

(8) 単調増加な数列の収束性に関する定理を述べなさい.

(9) 自然対数の底 e の定義を述べなさい.

(10) 有界な数列に対する Bolzano-Weierstrass の定理を述べなさい.

(11) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を述べなさい.

(12) 実数の完備性に関する定理を述べなさい.

(13) $a_{n+1} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ であるが，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しないような数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例をあげなさい．

(14) 正の数 $a > 0$ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty} a^n$ を求めなさい (答えのみでよい).

(15) 漸化式 $a_n = \sqrt{3 + 2a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$，初項 $a_0 = 5$ で定められた数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する．その極限値を求めなさい．

この下は計算用紙として利用してよい．

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 **2.**

$\dfrac{3n+10}{10n+12} \to \dfrac{3}{10} \quad (n \to \infty)$ となることを ε-N 論法で示したい.

(1) $\dfrac{3n+10}{10n+12} \to \dfrac{3}{10} \quad (n \to \infty)$ の ε-N 論法を用いた定義を述べなさい.

(2) $\dfrac{3n+10}{10n+12} \to \dfrac{3}{10} \quad (n \to \infty)$ を ε-N 論法を用いて示しなさい.

学生番号　　　　　　　　名前

問題 3.

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$a := \lim_{n\to\infty} a_n, b := \lim_{n\to\infty} b_n$ とおく.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 2b_n) = a - 2b$ となることの ε-N 論法による定義を述べなさい.

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 2b_n) = a - 2b$ となることを ε-N 論法を用いて示しなさい.

問題 4.

$A := (10, 23)$ とおく．$\sup A = 23$ を示したい.

(1) $\sup A = 23$ の定義を述べなさい.

(2) $\sup A = 23$ を証明しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．