

解析学及び演習 B 理解度確認試験

2026 年 1 月 23 日 第 3 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

$3x + 6x^2$ の Fourier 係数を求めよ.

問題 2.

e^{3x} の Fourier 係数を求めよ.

問題 3.

$\alpha > 0$ に対して, $|x|^{-\alpha} \in L^4(-3, 3)$ となるため, ならないための $\alpha > 0$ の条件を求めよ.

問題 4.

$\beta > 0$ に対して, $(1 + |x|^2)^{-\frac{\beta}{2}} \in L^2(\mathbb{R})$ となるため, ならないための $\beta > 0$ の条件を求めよ.

問題 5.

$k > 0$ に対して, $e^{-k|x|}, xe^{-k|x|}$ の Fourier 変換を求めよ.

問題 6.

\mathcal{F} は $L^1(\mathbb{R})$ 上で定義された線形写像であることを示せ. そして, $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}[f](\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

が成り立つことを示せ.

問題 7.

$h \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ に対して, 平行移動作用素 τ_h とスケール変換 δ_λ を $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対してそれぞれ

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h), \quad (\delta_\lambda f)(x) := f(x/\lambda)$$

で定める. このとき, $f \in L^1(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{F}[\tau_h f](\xi) = e^{-2\pi i \xi h} \mathcal{F}[f](\xi), \quad \mathcal{F}[\delta_\lambda f](\xi) = \lambda \mathcal{F}[f](\lambda \xi)$$

が成り立つことを示せ.

問題 8.

急減少関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = (2\pi i \xi) \mathcal{F}[f](\xi), \quad \mathcal{F}[(-2\pi i x)f](\xi) = \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi),$$

を示せ.