

(5) $\nu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ が集合 X 上の (Carathéodory の) 外測度であることの定義を述べなさい.

(6) 集合 X 上の外測度 ν^* が与えられたとき, $A \subset X$ が外測度 ν^* について可測集合であることの定義を述べなさい.

(7) X 上の関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を述べなさい.

(8) X 上の非負値可測関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ の測度 ν に関する (Lebesgue) 積分の定義を述べなさい.

(9) 測度空間 (X, Σ, ν) 上の積分の順序保存性に関する主張を述べなさい.

(10) 測度空間 (X, Σ, ν) 上の積分の線形性に関する主張を述べなさい.

(11) X 上の非負値可測関数列 $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対する単調収束定理の主張を述べなさい.

(12) 測度空間 (X, Σ, ν) 上の Fatou の補題の主張を述べなさい.

(13) 測度空間 (X, Σ, ν) 上の Lebesgue の優収束定理の主張を述べなさい.

(14) 測度空間 (X_1, Σ_1, ν_1) と (X_2, Σ_2, ν_2) に対して, 直積 σ -加法族 $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ の定義を述べなさい.

(15) $\nu_1 \times \nu_2$ が測度空間 (X_1, Σ_1, ν_1) と (X_2, Σ_2, ν_2) との直積測度であることの定義を述べなさい.

(16) 測度空間 (X_1, Σ_1, ν_1) と (X_2, Σ_2, ν_2) に対して, 直積外測度 $(\nu_1 \times \nu_2)^*$ の定義を述べなさい.

問題 2. 次の下線部が正しいか正しくないかを答えなさい.

$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度は Borel 測度である. Borel 測度とは, Borel 集合が可測集合となる測度であり, Borel 集合は開集合を含む最小の σ -加法族の元であった. 従って, $\mathbb{R}$ 上の閉集合 F は可測集合ではない₍₁₎. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は開集合ではないので, 可測集合ではない₍₂₎. また, $\mathbb{Q}$ に対する特性関数 $\chi_{\mathbb{Q}}$ は Lebesgue 測度空間上の可測関数ではない₍₃₎. さらに, $\chi_{\mathbb{Q}}$ は内部が空でない任意の有界閉区間 I 上で Riemann 積分可能でない₍₄₎.

$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とする. 可測集合の列が $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ が単調増加であるとき, $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$ は成り立つ₍₅₎. Lebesgue 測度 m を $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ をみたす測度 μ に置き換えると, この性質は一般には成り立たない₍₆₎. また, 可測集合の列が $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ が単調減少であるとき, $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$ が成り立つ₍₇₎. Lebesgue 測度 m を $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ をみたす測度 μ に置き換えると, この性質は一般には成り立たない₍₈₎.

$[-1, 1]$ 区間上の連続関数の列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ で, 各点収束の意味で $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0$ が成り立つとする. このときに,

$$(\text{積分と極限の交換}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_k(x) dx = \int_{-1}^1 \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = 0$$

が成り立つかどうかを考える.

まず, f_k は非正值で単調増加であるとする. このとき, f_k は一般的には非負値関数ではないので, (積分と極限の交換) は成立しない₍₉₎. 次に, f_k が非負値であるが単調増加ではないとする. Weierstrass の最大値定理によれば, f_k は最大値を持つので, f_k が非負値であることも考えると定数関数で $|f_k|$ は評価できる. 従って Lebesgue の優収束定理により (積分と極限の交換) が成り立つ₍₁₀₎.

1 次元 Lebesgue 可測集合全体からなる集合族 $\mathcal{L}^1$ と 2 次元 Lebesgue 可測集合全体からなる集合族 $\mathcal{L}^2$ との直積 σ -加法族 $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^2$ を考える. $S \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^2$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して, $S^x := \{y \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in S\}$ とおくと, $S^x \in \mathcal{L}^1$ が成り立つ₍₁₁₎. m_2 を 2 次元 Lebesgue 測度とすると, $x \mapsto m_2(S^x)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の可測関数である₍₁₂₎.

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

(7) (8) (9) (10) (11) (12)

以上