解析学及び演習 A 理解度確認試験

2025 年 7 月 25 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 次の各問いに答えよ.

(1) 集合 Ω に対し, $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の σ-加法族であることの定義を書け.

(2) 可測空間 (Ω, Σ) に対し, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ が Ω 上の測度であることの定義を書け.

(3) 測度空間 (Ω, Σ, μ) が σ-有限であることの定義を書け.

(4) 測度空間 (Ω, Σ, μ) の測度 μ が完備であることの定義を書け.

学生番号　　　　　　名前

(5) $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ が集合 Ω 上の (Carathèodory の) 外測度であることの定義を書け.

(6) 集合 Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることの定義を書け.

(7) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を書け.

(8) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分の定義を書け.

(9) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の順序保存性に関する主張を書け.

(10) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の線形性に関する主張を書け.

(11) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ に対する単調収束定理の主張を書け.

(12) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Fatou の補題とは何か？ 主張を書け.

(13) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Lebesgue の優収束定理とは何か？ 主張を書け.

(14) 測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ に対して, 直積 σ-加法族 $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ の定義を述べよ.

(15) 測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ に対して, 直積測度 $\mu_1 \times \mu_2$ がみたすべき性質は何か？

(16) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, (2 次元)Lebesgue 外測度 $m_2^*(A)$ の定義を書け.

(17) 次が正しいか正しくないかを答えよ.

(a) 可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ 上の計数測度 μ に対し, $\mu(\{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x \leq 5\}) = 3$.

(b) 可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ 上の $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ を台にもつ Dirac のデルタ測度 $\delta_{\sqrt{3}}$ に対し, $\delta_{\sqrt{3}}(\mathbb{Q}) = 0$.

(c) 一次元 Lebesgue 測度 m_1 に対して, $m_1(\mathbb{Q}) = 0$.

(18) m_2 を 2 次元 Lebesgue 測度とするとき, $m_2\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left(k, k+\frac{1}{2^k}\right) \times \left(k, k+\frac{1}{3^k}\right)\right)\right)$ を求めよ.

(19) 次が正しいか正しくないかを答えよ.

(a) $\mathbb{R}$ の部分集合 $(-1, 1]$ は Borel 集合である.

(b) $\mathbb{R}$ 上の非負値可積分関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたすとする. このとき, $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \to 0 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ.

(c) $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を σ-有限な測度空間とし, $S \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ とする. このとき, $y \in \Omega_2$ に対して, $S_y := \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in S\}$ とすると, $S_y \in \Sigma_2$ となる.

(20) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-nx^2} \sin nx + e^{-nx^4} \cos(x^2)}{1 + x^2}\,dx$ を求めよ.

以上