解析学及び演習 A 理解度確認試験

2024 年 7 月 26 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 次の各問いに答えよ.

(1) 集合 Ω に対し, $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の σ-加法族であることの定義を書け.

(2) 可測空間 (Ω, Σ) に対し, $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ が Ω 上の測度であることの定義を書け.

(3) 測度空間 (Ω, Σ, μ) が σ-有限であることの定義を書け.

(4) 測度空間 (Ω, Σ, μ) の測度 μ が完備であることの定義を書け.

学生番号　　　　　　名前

(5) $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ が集合 Ω 上の (Carathèodory の) 外測度であることの定義を書け.

(6) 集合 Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることの定義を書け.

(7) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義を書け.

(8) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分の定義を書け.

(9) Lebesgue 積分の順序保存性に関する主張を書け.

(10) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の積分の線形性に関する主張を書け.

(11) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ に対する単調収束定理の主張を書け.

(12) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Fatou の補題とは何か？ 主張を書け.

(13) 測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Lebesgue の優収束定理とは何か？ 主張を書け.

(14) 測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ に対して, 直積外測度 $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ の定義を述べよ.

(15) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, (2 次元)Lebesgue 外測度 $m_2^*(A)$ の定義を書け.

(16) 可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ 上の計数測度 μ に対し, $\mu(\{x \in \mathbb{Z} : -3 \le x \le 5\})$ はいくつか.

(17) 可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ 上の $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ を台にもつ Dirac のデルタ測度 $\delta_{\sqrt{3}}$ に対し，次が正しいか正しくないかをそれぞれ答えよ.

(a) $\delta_{\sqrt{3}}(\mathbb{Q}) = 0$

(b) $\delta_{\sqrt{3}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$

(c) $\delta_{\sqrt{3}}([0, 2]) = 2$

(18) m_1 を 1 次元 Lebesgue 測度とするとき，$m_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(2k, 2k + \frac{3}{4^k}\right)\right)$ を求めよ.

(19) 次が正しいかどうかを答えよ.

(a) $\mathbb{R}$ 上の開集合 U は Borel 集合である.

(b) 測度空間 (Ω, Σ, μ) において，$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ をみたす可測集合の列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ に対して，$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

(c) $(0, 1) \times (1, \infty)$ 上の Lebesgue 可測関数 $f : (0, 1) \times (1, \infty) \to \mathbb{R}$ に対して

$$\iint_{(0,1)\times(1,\infty)} f(x, y)\, dxdy = \int_1^{\infty} \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx\right) dy.$$

(20) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-(1+\frac{1}{n})|x|} + \cos(nx)e^{-nx^2}\right) dx$ を求めよ.

以上